SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Francesco Serra Cassano

SU UN CONTROESEMPIO ALLA DISUGUAGLIANZA DI POINCARE' CON PESI

20 febbraio 1992

In questo seminario vorrei trarre spunto da un controesempio alla disuguaglianza di Poincaré con peso (vedi [SC]) per fare alcune osservazioni circa i legami tra la disuguaglianza di Poincaré con peso λ e alcune proprietà di λ (quali, per esempio, la sommabilità di λ, la sommabilità di λ^{-1}, proprietà della misura λdx).

Infine vorrei presentare un esempio *patologico* di soluzione di un'equazione ellittica degenere per discutere dei legami tra disuguaglianza di (Sobolev-)Poincaré e proprietà di regolarità di soluzioni di equazioni ellittiche degeneri (in particolare per quanto riguarda la proprietà di globale limitatezza).

1. UN CONTROESEMPIO ALLA DISUGUAGLIANZA DI POINCARE' CON PESO.

Incominciamo con il definire cosa intenderemo per disuguaglianza di (tipo) Sobolev-Poincaré.

Siano $\lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ q.o. su $\mathbb{R}^n$, Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $X(\Omega) \subseteq W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $1 < p \leq q < +\infty$.

Diremo che vale la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré in $X(\Omega)$ (di tipo p, q, relativamente a λ) se esiste una costante positiva c tale che

$$\mathcal{P}_{p,q}(\Omega,\lambda) : \quad \left(\int_\Omega |u|^q \lambda dx\right)^{1/q} \leq c \left(\int_\Omega |Du|^p \lambda dx\right)^{1/p} \quad \text{per ogni } u \in X(\Omega).$$

Nel caso in cui p = q diremo che vale la disuguaglianza di Poincaré e porremo semplicemente $\mathcal{P}_p(\Omega,\lambda) \equiv \mathcal{P}_{p,p}(\Omega,\lambda)$.

Nel caso n = 1 possono essere date delle caratterizzazioni (generalmente, in termini di condizioni integrali su λ) affinchè $\mathcal{P}_{p,q}(\Omega,\lambda)$ valga in $X(\Omega)$. Ricordiamo, per esempio, una caratterizzazione interessante dovuta a G.Talenti e che è alla base di questo seminario (vedi [T], vedi anche [M], § 1.3 Teorema 2): siano $1 < p \le q < +\infty$ allora $\mathcal{P}_{p,q}((0,a),\lambda)$ vale in $X((0,a)) = \{ u \in C^1([0,a]) : u(a)=0 \}$ se e solo se

$$(1.1) \qquad \sup_{0<y<a} \left[\left(\int_0^y \lambda dr \right)^{1/q} \left(\int_y^a \lambda^{-1/(p-1)} dr \right)^{(p-1)/p} \right] < +\infty .$$

Nel caso generale $n \ge 1$ vale la seguente caratterizzazione della disuguaglianza di Sobolev-Poincaré in $C_0^\infty(\Omega)$ (vedi [S], Teorema 2.2.41): $\mathcal{P}_{p,q}(\Omega,\lambda)$ vale in $C_0^\infty(\Omega)$ se e solo se esiste una costante positiva c tale che per ogni compatto K contenuto in Ω con frontiera di classe C^∞

$$(1.2) \qquad \left(\int_K \lambda dx \right)^{1/q} \le c \left(\mathscr{C}_\Omega^{(p)}(K,\lambda) \right)^{1/p}$$

dove

$$(1.3) \qquad \mathscr{C}_\Omega^{(p)}(K,\lambda) := \inf \left\{ \int_\Omega |D\varphi|^p \lambda dx \ : \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ con } \varphi \ge 1 \text{ su } K \right\}$$

denota la p-capacità di K ripetto alla misura λdx.

Osserviamo che, tranne il caso unidimensionale, può risultare molto difficile stimare la quantità in (1.3) per un arbitrario compatto $K \subset \Omega$ con frontiera di classe C^∞ e dunque verificare la (1.2).

Infine ricordiamo le seguenti condizioni **sufficienti** affinchè valgano rispettivamente una disuguaglianza di Poincaré e una di Sobolev-Poincaré in $C_0^1(\Omega)$ (vedi rispettivamente [MS] e [FKS]).

Supponiamo che

(1.4) $\lambda \in L^s(\Omega)$, $\lambda^{-1} \in L^t(\Omega)$ con $s, t \in [1,+\infty]$ tali che

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \le \frac{p}{n} \quad \text{e} \quad (1+ \frac{1}{t}) < p < n\,(1+ \frac{1}{t});$$

allora $\mathcal{P}_p(\Omega,\lambda)$ vale in $C_0^1(\Omega)$.

Supponiamo che

(1.5) λ soddisfi la condizione di Muckenhoupt $(p > 1)$

$$(A_p) \qquad \sup_Q \left[\left(\text{mis}(Q)^{-1} \int_Q \lambda dx \right) \left(\text{mis}(Q)^{-1} \int_Q \lambda^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \right] < +\infty,$$

dove l'estremo superiore è fatto su tutti i cubi Q di $\mathbb{R}^n$ con facce parallele ai piani cartesiani;

allora $\mathcal{P}_{p,q}(\Omega,\lambda)$ vale in $C_o^1(\Omega)$ per ogni $1 < p \le q < p\left(\frac{n}{n-1}+\varepsilon\right)$ (dove ε è un numero positivo dipendente dal peso λ), per ogni Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

In questo seminario vorrei trattare il caso della disuguaglianza di Poincaré quando λ è un **p-peso** su $\mathbb{R}^n$, cioè λ soddisfi

(1.6) $\quad \lambda > 0$ q.o. su $\mathbb{R}^n$, λ e $\lambda^{-1/(p-1)}$ sono in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

I problemi che ci poniamo sono di vedere se vale $\mathcal{P}_p(\Omega,\lambda)$ in $C^1_0(\Omega)$ nel caso di λ p-peso e di dare una caratterizzazione "semplice" (cioè, per esempio, tipo la (1.1) anche nel caso di insiemi Ω particolari) in modo da poter evidenziare meglio i legami con il peso λ.

La risposta al primo problema come vedremo sarà, in generale, negativa se $n \ge 2$ (vedi Proposizione 1.6); il secondo, nel caso $n \ge 2$, è un problema aperto, tranne alcuni casi particolari, come quello considerato nella seguente proposizione.

Denotiamo con B_n la palla unitaria aperta di $\mathbb{R}^n$ e con H_{n-1} la *misura di Hausdroff* (n-1)-dimensionale su $\mathbb{R}^n$, allora

Proposizione 1.1 : *Supponiamo che λ sia della forma*

(1.7) $\quad \lambda(x) = \mu(|x|)\,\nu(\frac{x}{|x|}) \qquad x\in B_n\setminus\{0\}$

con $\mu : (0,1) \longrightarrow [0,+\infty)$, $\nu : \partial B_n \longrightarrow [0,+\infty)$ e $\nu\in L^1(\partial B_n, H_{n-1}(d\vartheta))$.

Allora vale $\mathcal{P}_p(B_n,\lambda)$ ($p > 1$) *se e solo se*

(1.8) $$\sup_{0<r<1}\left[\left(\int_0^r \mu(\rho)\rho^{n-1}d\rho\right)^{1/p}\left(\int_r^1\left(\mu(\rho)\rho^{n-1}\right)^{-1/(p-1)}d\rho\right)^{(p-1)/p}\right] < +\infty.$$

Dim. : Poniamo $\varphi(r) := \mu(r)r^{n-1}$ $r\in(0,1)$. Supponiamo che $\mathcal{P}_p(B_n,\lambda)$ valga in $C_0^1(B_n)$; allora considerando le funzioni radiali $u(x)=v(|x|)$ segue subito che vale $\mathcal{P}_p((0,1),\varphi)$ sull'insieme $\{ v\in C_0^1([0,1]) : v(1)=0 \}$.

Attraverso un argomento di densità segue allora che $\mathcal{P}_p((0,1),\varphi)$ vale su $X((0,1)) := \{ v\in C^1([0,1]) : v(1)=0 \}$ e dunque, dalla (1.1) segue che la (1.8) è verificata.

Viceversa, supponiamo che valga la (1.8), allora dalla (1.1) segue che vale $\mathcal{P}_p((0,1),\varphi)$ su $X((0,1)) = \{ v\in C^1([0,1]) : v(1)=0 \}$.

D'altra parte, se per una fissata $u\in C_0^1(B_n)$ definiamo

$$v_\vartheta(r) := u(x) = u(r\vartheta) \qquad \text{con } r = |x| \quad \text{e} \quad \vartheta = \frac{x}{|x|}$$

abbiamo che $v_\vartheta\in X((0,1))$ per ogni $\vartheta\in\partial B_n$.

In particolare esiste una costante positiva $c=c(\mu)$ tale che per ogni $u\in C_0^1(B_n)$

$$\int_0^1 |u(r\vartheta)|^p\varphi(r)dr = \int_0^1 |v_\vartheta(r)|^p\varphi(r)dr \le c \int_0^1 |v'_\vartheta(r)|^p\varphi(r)dr \le$$

$$\le c \int_0^1 |Du(r\vartheta)|^p\varphi(r)dr \qquad \text{per ogni } \vartheta\in\partial B_n.$$

Integrando allora in coordinate polari otteniamo che

$$\int_{B_n} |u|^p\lambda dx = \int_{\partial B_n} \nu(\vartheta)H_{n-1}(d\vartheta)\int_0^1 |u(r\vartheta)|^p\varphi(r)dr \le$$

$$c \int_{\partial B_n} \nu(\vartheta)H_{n-1}(d\vartheta)\int_0^1 |Du(r\vartheta)|^p\varphi(r)dr = c \int_{B_n} |Du|^p\lambda dx ,$$

per ogni $u\in C_0^1(B_n)$ e dunque la tesi. ■

Osservazione 1.2 : Sia $\lambda\in L^1_{loc}(B_n)$, $\lambda > 0$ q.o. su B_n, ragionando come nella prima parte della dimostrazione della Proposizione 1.1 otteniamo che condizione **necessaria** affinchè $\mathcal{P}_{p,q}(B_n,\lambda)$ valga in $C_0^1(B_n)$ è che

$$(1.9)\quad \sup_{0<r<1}\left[\left(\int_0^r\left(\int_{\partial B_n}\varphi(\rho,\vartheta)H_{n-1}(d\vartheta)\right)d\rho\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_r^1\left(\int_{\partial B_n}\varphi(\rho,\vartheta)H_{n-1}(d\vartheta)\right)^{-\frac{1}{p-1}}d\rho\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]<+\infty.$$

dove $\varphi(\rho,\vartheta) := \lambda(\rho\vartheta)\rho^{n-1}$.

Osservazione 1.3 : Nelle stesse ipotesi della Proposizione 1.1, allora la condizione (1.9) è **necessaria** e **sufficiente** affinchè $\mathcal{P}_{p,q}(B_n,\lambda)$ valga in $X(B_n) := \{\ u\in C_0^1(B_n)\ :\ u \text{ radiale }\}$.

Osservazione 1.4 : Siano λ e μ come nella (1.5). Supponiamo che $\lambda\in L^1_{loc}(B_n)$, $\mu^{-1/(p-1)}\in L^1((r_0,1))$ $(0 < r_0 < 1)$ e

$$r \longmapsto \mu(r)r^{n-1} \text{ sia strettamente crescente su } (0,r_0)\ .$$

Allora è facile provare che la (1.8) risulta verificata e dunque $\mathcal{P}_p(B_n,\lambda)$ vale in $C_0^1(B_n)$.

Osservazione 1.5 : Siano $p = 2$, $\lambda(x) = |x|^{-n-1}e^{-|x|^{-1}}$; si verifica sfruttando l'Osservazione 1.4 che $\mathcal{P}_2(B_n,\lambda)$ vale in $C_0^1(B_n)$.

D'altra parte si può verificare che per λ non vale la (1.9) se $p = 2$ e $q = 2k$ con $k > 1$.

Pertanto $\mathcal{P}_{2,2k}(B_n,\lambda)$ vale in $C_0^1(B_n)$ se $k = 1$, ma non vale per $k > 1$.

Osserviamo inoltre che la misura $m := \lambda dx$ su $\mathbb{R}^n$ non verifica la "doubling condition", cioe non esiste una costante positiva c tale che

$$m(B_{2r}(x)) = \int_{B_{2r}(x)}\lambda dy \le c\ m(B_r(x)) = c\int_{B_r(x)}\lambda dy \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall r>0$$

(dove $B_\rho(x)$ denota la palla di centro x e raggio ρ in $\mathbb{R}^n$).

Diamo ora il controesempio alla disuguaglianza di Poincarè nel caso di λ p-peso (vedi [SC], Proposizione 1.3).

Sia $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ la funzione definita da

$$(1.10) \qquad \varphi(r) := r^{\beta} + \sum_{h=0}^{+\infty} \varphi_h(r)$$

dove $\varphi_h : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ $(h=0,1,...)$ sono definite da

$$(1.11) \quad \varphi_h(r) := \begin{cases} 0 & 0\le r\le 2^{-h-1} \text{ o } r\ge 2^{-h} \\ 2^{-\beta h}\left(1-\left(\dfrac{r-5\,2^{-h-3}}{2^{-h-3}}\right)^2\right)^2 & |r-5\,2^{-h-3}|< 2^{-h-3} \qquad (h\ge 0) \\ 2^{-\alpha h}\left(1-\left(\dfrac{r-7\,2^{-h-3}}{2^{-h-3}}\right)^2\right)^2 & |r-7\,2^{-h-3}|< 2^{-h-3} \end{cases}$$

con $0 \le \alpha < \beta$.

Definiamo ora la funzione $\lambda_o : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$

$$(1.12) \qquad \lambda_o(x) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(|x|)}{|x|^{n-1}} & x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

dove $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ è la funzione definita in (1.11).

Proposizione 1.6 : *Siano* $n \ge 2$, $p > 1$, α *e* β *numeri positivi verificanti*

$$\alpha+p < \beta < pn-1 ,$$

e sia $\lambda_o : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$ *la funzione definita in* (1.12).

Allora λ_o *è un p-peso su* $\mathbb{R}^n$ *per cui* $\mathcal{P}_p(B_n,\lambda_o)$ *non vale in*

$$X(B_n) := \left\{u\in C^1_0(B_n) \text{: u radiale}\right\}.$$

Osservazione 1.7 : Osserviamo che (vedi [SC], Proposizione 1.2 e 1.3), se $n \ge 2$, $p > n/(n-1)$ e

$$n-1 < \alpha < p(n-1)-1 \quad , \quad \alpha+p < \beta < pn-1,$$

allora la funzione λ_o è un p-peso su $\mathbb{R}^n$, **continuo** per cui $\mathcal{P}_p(B_n,\lambda_o)$ non vale in $C^1_0(B_n)$.

D'altra parte, se $n \geq 2$, $p > (n+1)/(n-1)$ e

$$n < \alpha < p(n-1)-1 \quad , \quad \alpha+p < \beta < pn-1,$$

λ_o un p-peso su $\mathbb{R}^n$ **di classe** C^1.

Osservazione 1.8 : Dal controesempio si può dedurre (vedi [SC], Osservazione 1.5) che la condizione di sommabilità (1.4) è ottimale.

Infatti, quando $p\in[2,2n-1)$, $n \geq 2$ per ogni $s\in [n/(n-1),+\infty)$, $t\in (1,+\infty)$ con $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} > \frac{p}{n}$, è possibile trovare, attraverso un'opporuna scelta di α e β, un p-peso λ_o tale che $\mathcal{P}_p(B_n,\lambda_o)$ non vale in $C^1_0(B_n)$.

2.UN ESEMPIO DI SOLUZIONE PATOLOGICA DI UN'EQUAZIONE ELLITICA DEGENERE.

In questa sezione viene presentato un esempio di una soluzione (debole) di un problema di Dirichlet per un'equazione ellittica degenere, che non verifica una classica proprietà di globale limitatezza.

A questo scopo introduciamo qualche definizione e qualche risultato preliminare.

Sia λ un p-peso su $\mathbb{R}^n$ (cioè λ soddisfi la (1.6)) e sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Denoteremo con $L^p(\Omega,\lambda)$ l'insieme delle funzioni $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ tali che $|u|^p\lambda\in L^1(\Omega)$.

Inoltre, se λ è un 2-peso su $\mathbb{R}^n$, denoteremo con $H^1_0(\Omega,\lambda)$ lo spazio di Sobolev con peso definito come il completamento di $C^1_0(\Omega)$ nella topologia indotta dalla norma

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega,\lambda)} := \left(\int_\Omega |Du|^2\lambda dx\right)^{1/2} .$$

Si può provare che $H^1_0(\Omega,\lambda)$ è uno spazio di Hilbert e

$$H^1_0(\Omega,\lambda) \subset W^{1,1}_0(\Omega) .$$

Osservazione 2.1 : Quando λ non è un 2-peso la precedente immersione non è garantita poichè il gradiente di una funzione di $H^1_0(\Omega,\lambda)$ può non essere univocamente definito (vedi [FKS])

Infine denoteremo con $H^{-1}(\Omega,\lambda)$ lo spazio duale di $H^1_0(\Omega,\lambda)$.

Sia λ un 2-peso su $\mathbb{R}^n$ e sia $[a_{ij}(x)]_{i,j}$ una matrice simmetrica di funzioni misurabili di ordine n^2, tale che esiste una costante positiva $L \geq 1$ per cui

$$\text{(2.1)} \qquad \lambda(x)\ |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq L\ \lambda(x)\ |\xi|^2 \qquad \text{q.o..}x\in\Omega,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Dal teorema di Lax-Milgram si ha che, per ogni $f\in H^{-1}(\Omega,\lambda)$, il problema di Dirichlet

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_jv) = f \\ v\in H^1_0(\Omega,\lambda) \end{cases}$$

ha soluzione unica.

Molti lavori trattano dello studio del comportamento globale della soluzione di (2.2) sotto opportune ipotesi su λ e f (vedi, per esempio, [FKS], [MS], [S] e [Mo] per la trattazione da un punto di vista variazionale).

Per quanto concerne la globale limitatezza delle soluzioni di (2.2) ci sono, per esempio, i seguenti risultati : sia u la soluzione di (2.2) con

$$(2.3)\qquad f \equiv f_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i(f_i) .$$

Allora u è in $L^\infty(\Omega)$ se una delle seguenti condizioni è soddisfatta (vedi rispettivamente [MS] e [FKS])

(i) (2.4) $\lambda\in L^\infty(\Omega)$ e $\lambda^{-1}\in L^t(\Omega)$ con $t > n$,

(2.5) $f_0\in L^p(\Omega)$, $f_i\ \lambda^{-2/p}\in L^p(\Omega,\lambda)$ $(i=1,2,..,n)$ con $p > \dfrac{n(t-1)}{t-n}$;

oppure

(ii) (2.6) λ soddisfa la condizione A_2 (vedi (1.6)),

(2.7) $f_0\equiv 0$, $f_i\lambda^{-1}\in L^p(\Omega,\lambda)$ $(i=1,..,n)$ con $p \ge 2n-\varepsilon$,

(dove $\varepsilon > 0$ dipende solo da λ)

Proveremo che un risultato di questo tipo non vale per un 2-peso λ quando (2.4) (rispettivamente (2.6)) non è soddisfatta, anche se assumiamo che (2.5) (rispettivamente (2.7)) è soddisfatta e $\mathcal{P}_p(\Omega,\lambda)$ valga in $H^1_0(\Omega,\lambda)$.

Sia $n \ge 2$ e poniamo

$$(2.8)\qquad \lambda_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| = 0 \\ |x|^n \lg^2\left(\dfrac{e}{|x|}\right) & \text{se } 0 < |x| \le 1 \\ |x|^{n-2} & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

e

$$(2.9)\qquad u_1(x) := \lg\lg\left(\frac{e}{|x|}\right) \qquad 0 < |x| < 1 .$$

Allora λ_1 è un 2-peso su $\mathbb{R}^n$ di classe C^1, positivo in $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

Inoltre si può provare che (vedi [SC], § 2)

$$(2.10)\qquad u_1\in H^1_0(B_n,\lambda_1) \quad \text{e} \quad Du_1(x) = -\frac{x}{|x|^2 \lg\frac{e}{|x|}} \quad \text{per q.o.} x\in B_n .$$

Dalla (2.9) e (2.10) segue che, se $n \ge 2$,

$$(2.11)\quad -\sum_{i=1}^{n} D_i(\lambda_1(x) D_i u_1) = \sum_{i=1}^{n} D_i\left(|x|^{n-2} \lg\frac{e}{|x|}\, x_i\right) = |x|^{n-2}\left(2(n-1)\lg\frac{e}{|x|} - 1\right).$$

Perciò, dalla (2.10) e (2.11), abbiamo che u_1 è l'unica soluzione del problema (2.2) con $\Omega = B_n$, $a_{ij}(x) = \lambda_1(x)\,\delta_{ij}$ e

$$f \equiv |x|^{n-2}\left(2(n-1)\lg\frac{e}{|x|} - 1\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} D_i\left(|x|^{n-2}\lg\frac{e}{|x|}\, x_i\right).$$

Quando $n > 3$, f può essere considerata come una funzione di classe C^1 su $\bar{B}_n$, in modo che la condizione (2.5) valga con $p = \infty$; allo stesso tempo quando $n \geq 2$, f soddisfa la (2.7) con $p = 2n$. Inoltre dall' Osservazione 1.4 discende che $\mathcal{P}_2(B_n,\lambda)$ vale in $C_0^1(B_n)$ e dunque per densità che vale anche in $H_0^1(B_n,\lambda_1)$.

D'altra parte dalla (2.9) risulta che u_1 non è in $L^\infty(B)$.

Osservazione 2.2 : Si può verificare che nel caso $p = 2$, la (1.9) risulta verificata se e solo se $2 \leq q \leq 2n/(n-1)$. In particolare da ciò segue che $\mathcal{P}_{2,q}(B_n,\lambda)$ non vale se $q > 2n/(n-1)$.

BIBLIOGRAFIA

[FKS] FABES E.-KENIG C.-SERAPIONI R. : *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations.* Comm.Part.Diff.Eq. (1) 7 (1982), 77-116.

[M] MAZ'JA V.G. : *Sobolev spaces.* Springer-Verlag (1985).

[Mo] MODICA G : *Quasiminimi di alcuni funzionali degeneri.* Ann.Mat.Pura Appl. (4) **142** (1985), 121-143.

[MS] MURTHY M.K.V.-STAMPACCHIA G. : *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators.* Ann.Mat.Pura Appl. 80 (1968), 1-122.

[SC] SERRA CASSANO F. : *A counterexample in the weighted Poincaré inequality.* Preprint Dip. Mat. Univ. Pisa.

[S] STREDULINSKY E.W. : *Weighted inequalities and degenerate elliptic partial differential equations.* Lect.Notes in Math., Springer-Verlag (1980).

[T] TALENTI G. : *Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze.* Rend. Sem.Mat.e Fis.Milano, 39 (1969), 171-185.